LES DIFFERENTES MOYENNES

A- Moyenne Arithmétique :

La **moyenne arithmétique** de 3, 4 et 18, par exemple, se fait en ajoutant 3 + 4 + 18, et en divisant le résultat par 3, car il y a trois nombres, soit 25/3 c'est-à-dire environ 8,333.... Si vous additionnez trois fois 8,3333..., vous obtenez la même chose qu'en additionnant 3, 4 et 18.
La moyenne arithmétique répond à la question : "Quelle valeur unique doit-on additionner, autant de fois qu'il y a de nombres au départ, pour obtenir la somme de ces nombres de départ ?"

B- Moyenne Géométrique :

La **moyenne géométrique** répond plutôt à la question : "Quelle valeur unique doit-on multiplier, autant de fois qu'il y a de nombres au départ, pour obtenir le produit de ces nombres de départ ?"
Donc, pour trouver la moyenne géométrique de 3, 4 et 18, on multiplie : 3 x 4 x 18. Ce qui donne 216. On prend alors la racine cubique de ce résultat (racine cubique car il y avait trois nombres au départ). La réponse est 6. En d'autres termes, puisque 6 x 6 x 6 = 3 x 4 x 18, alors 6 est la moyenne géométrique de 3, 4 et 18.
La moyenne géométrique de n valeurs est égale à la racine nième de leur produit
La moyenne géométrique d'une série de nombres est toujours inférieure ou égale à la moyenne arithmétique de ce même ensemble.
La moyenne géométrique ne se calcule qu'avec des nombres positifs. Dans un problème où une moyenne géométrique semblerait utile, si les nombres sont négatifs, cela ne marchera pas !

Exemple d'application : une action a vu son cours doubler en un an et être multiplié par 8 l'année suivante. Quel est le coefficient multiplicateur moyen ?
Le cours de l'action a été multiplié par 16 (2x8) en deux ans, ce qui revient au même qu'un coefficient multiplicateur de 4 pour les deux années consécutives. Ici, la moyenne de 2 et 8 est donc 4. Cette moyenne s'appelle une moyenne géométrique. Comme les suites géométriques, elle est basée sur la multiplication. La différence avec une moyenne arithmétique saute aux yeux :

- 2x8 = 16 = 4x4 Moyenne géométrique : 4
- 2+8 = 10 = 5+5 Moyenne arithmétique : 5

C- Moyenne Quadratique :

La **moyenne quadratique** de plusieurs grandeurs est la racine carrée de la moyenne arithmétique de leurs carrés.

Exemple : soient 2 cordes de diamètres différents (1 cm et 2 cm) - Si on les remplace par deux cordes de même diamètre (ici par le diamètre moyen arithmétique 1,5 cm : moyenne arithmétique de 1 et 2), le résultat physique est-il le même ? Et bien le résultat, c'est la résistance, qui est proportionnelle à la section des cordes.
Faisons le calcul : en appelant d1 et d2 les diamètres des cordes et d le diamètre moyen, on doit avoir : $(\pi d_1)^2/4 + (\pi d_2)^2/4 = 2(\pi d)^2/4$ (surface d'un cercle : $S = (\pi d)^2/4$)

$$\text{soit} \quad (d_1^2 + d_2^2)/2 = d^2 = 2{,}5 \quad \text{ou} \quad [(d_1^2 + d_2^2)/2]^{1/2} = d = 1{,}58$$

Le diamètre moyen est 1,58cm. Cette moyenne qui fait intervenir les carrés s'appelle une moyenne quadratique. La moyenne arithmétique (1,5cm) est ici mal adaptée : deux cordes de 1,5cm de diamètre seraient moins résistantes que l'ensemble formé par les deux cordes proposées de 1 et 2cm de diamètre.

D- Moyenne Logarithmique :

En Thermodynamique la Puissance P d'un échangeur thermique est proportionnelle à la Différence de Température Logarithmique Moyenne (DTLM) :

$$\boxed{P = K_G * S * DTLM} \qquad \boxed{DTLM = \frac{\Delta\theta_E - \Delta\theta_S}{\ln\left(\frac{\Delta\theta_E}{\Delta\theta_S}\right)}}$$

Avec S est la surface d'échange (m²) et K_G le coefficient global d'échange thermique (W/m²°C), (caractéristique de la paroi d'échange)
Si "Sortie échangeur : Delta Température E = Tcs-Tfe " ne diffère pas plus de 50% de "Entrée échangeur : Delta Température S = Tce-Tfs " on peut remplacer la moyenne logarithmique de la température globale par la moyenne arithmétique, en ne commettant qu'une erreur de 1% ; il est d'usage et cela se justifie d'assimiler la moyenne logarithmique a la moyenne arithmétique.

E- Variance et Ecart-Type :

La variance est une mesure du degré de dispersion d'un ensemble de données. On la calcule en prenant la moyenne de l'écart au carré de chaque nombre par rapport à la moyenne d'un ensemble de données. Pour les nombres 1, 2 et 3, par exemple, la moyenne est 2 et la variance, 0,667 : $[(1 - 2)^2 + (2 - 2)^2 + (3 - 2)^2] \div 3 = 0{,}667$

[somme de l'écart au carré] ÷ nombre d'observations = variance

Variance, (S^2) = moyenne de l'écart au carré de valeurs par rapport à la moyenne
Comme le calcul de la variance se fait à partir des carrés des écarts, les unités de mesure ne sont pas les mêmes que celles des observations originales. Par exemple, les longueurs mesurées en mètres (m) ont une variance mesurée en mètres carrés (m^2).
La racine carrée de la variance nous donne les unités utilisées dans l'échelle originale.

Écart-type, (S) = Racine carrée de la variance
L'écart-type est la mesure de dispersion la plus couramment utilisée en statistique lorsqu'on emploie la moyenne pour calculer une tendance centrale. Il mesure donc la dispersion autour de la moyenne. En raison de ses liens étroits avec la moyenne, l'écart-type peut être grandement influencé si cette dernière donne une mauvaise mesure de tendance centrale.
L'écart-type est aussi influencé par les valeurs aberrantes; une seule de ces valeurs pourrait avoir une grande influence sur les résultats de l'écart-type. Il s'agit donc d'un bon indicateur de l'existence de valeurs aberrantes, ce qui en fait une mesure de dispersion très utile pour les distributions symétriques ne comptant aucune valeur aberrante.

Propriétés de l'écart-type : se souvenir des propriétés suivantes quand on utilise l'écart-type.

- On n'utilise l'écart-type que pour mesurer la dispersion autour de la moyenne d'un ensemble de données.
- L'écart-type n'est jamais négatif.
- L'écart-type est sensible aux valeurs aberrantes. Une seule valeur aberrante peut accroître l'écart-type et, par le fait même, déformer le portrait de la dispersion.
- Dans le cas des données ayant approximativement la même moyenne, plus la dispersion est grande, plus l'écart-type est grand.
- L'écart-type est zéro si toutes les valeurs d'un ensemble de données sont les mêmes (parce que chaque valeur est égale à la moyenne).

Quand on analyse des données normalement distribuées, on peut utiliser l'écart-type parallèlement à la moyenne pour calculer des intervalles de données.

Si $\overline{X}$= moyenne, S = écart-type et x = une valeur incluse dans l'ensemble de données, alors

- ✓ environ 68 % des données se situent à l'intérieur de l'intervalle : $\overline{X} - S < x < \overline{X} + S$.
- ✓ environ 95 % des données se situent à l'intérieur de l'intervalle : $\overline{X} - 2S < x < \overline{X} + 2S$.
- ✓ environ 99 % des données se situent à l'intérieur de l'intervalle : $\overline{X} - 3S < x < \overline{X} + 3S$.

Exemple – Écart-type : Une poule pond huit œufs.

Voici les poids en grammes (g) des œufs : 60 g, 56 g, 6l g, 68 g, 51 g, 53 g, 69 g, 54 g.

a. Premièrement, calculez la moyenne : $\overline{X} = \dfrac{\Sigma\, x}{n} = \dfrac{472}{8} = 59$

b. Maintenant, trouvez l'écart-type.

Tableau Poids des oeufs, en grammes

Poids (x)	(x - $\overline{X}$)	(x - $\overline{X}$)^2	Poids (x)	(x - $\overline{X}$)	(x - $\overline{X}$)^2
60	1	1	51	-8	64
56	-3	9	53	-6	36
61	2	4	69	10	100
68	9	81	54	-5	25
			P tot=472		Total=320

À l'aide de l'information tirée du tableau ci-dessus, nous pouvons voir que : $\Sigma\,(x - \overline{X})^2 = 320$

Pour calculer l'écart-type, on doit utiliser la formule qui suit :

$$S = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x - \overline{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{320}{8}} = 6{,}32 \text{ grammes}$$

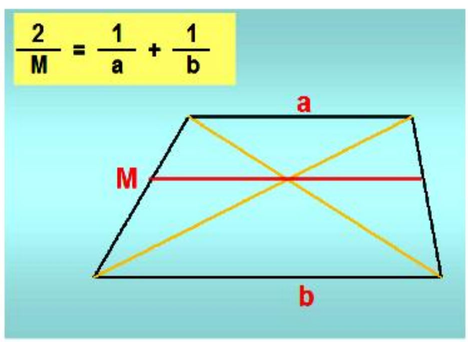
F- Moyenne Harmonique :

Deux données

La moyenne harmonique fait intervenir la somme des inverses des nombres : $\dfrac{2}{M_h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

À titre illustratif, dans un trapèze, il est possible de mettre en évidence un segment en moyenne harmonique avec les deux bases

$$M_h = 2 \times \frac{a \times b}{a + b}$$



Plusieurs données $\dfrac{n}{M_h} = \dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_1} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}$

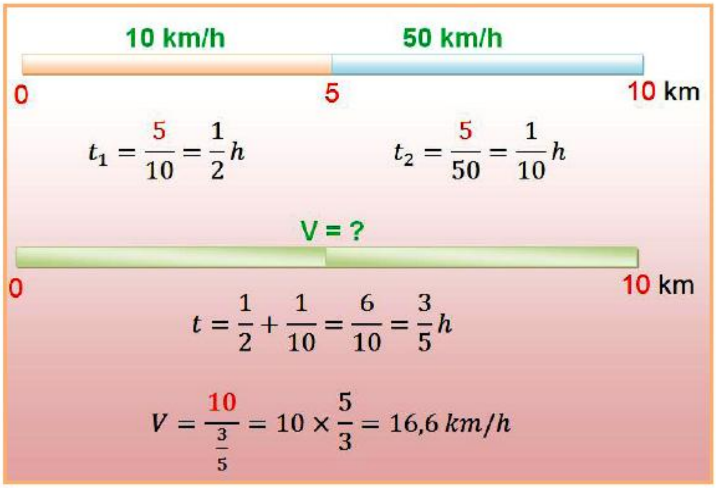
C'est la moyenne arithmétique des inverses

La moyenne harmonique intervient dans le calcul

- de la vitesse moyenne sur un trajet parcouru à diverses vitesses (*Voir* exemple)
- de la résistance équivalente dans les circuits comportant des résistances en parallèle.
- de la longueur des cordes des instruments de musique (à l'origine du nom), car la fréquence produite est inversement proportionnelle à la longueur de la corde.

La moyenne harmonique est toujours plus petite que les deux autres, arithmétique et géométrique.

Moyenne HARMONIQUE – Les vitesses



C'est la moyenne utilisés pour calculer des vitesses moyennes.

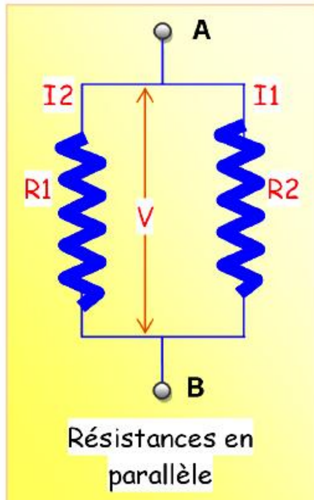
Rappelez-vous, les calculs de vitesses fourmillent de pièges; celui de la moyenne des vitesses, aussi!
Dans l'exemple la vitesse moyenne n'est pas 30 km/h.

Avec les problèmes de vitesses, le truc est de toujours s'en remettre à la formule :

L = V . t

Cette moyenne fait intervenir, non pas la somme comme pour la moyenne arithmétique, mais la somme des inverses des nombres.
Aller: 5 km à 10 km/h puis 5km à 50 km/h
Retour: à quelle vitesse constante tout en mettant le même temps? Réponse 16,6 km/h.

Moyenne HARMONIQUE - RÉSISTANCES EN PARALLÈLE



- Dans un montage en parallèle, les bornes des résistances sont réunies.
Dans ces conditions le courant va se partager pour suivre les deux chemins qui lui sont offerts.

I = I1 + I2

- La différence de potentiel aux bornes des résistances est la même (V).
- Appliquons la loi d'Ohm pour chacune des deux branches du circuit:

V = R1 . I1
V = R2 . I2

- On cherche la résistance équivalente telle que:

V = R . I
V = R (V/R1 + V/R2)

- En simplifiant par V : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}$ $\quad R = \frac{R1\ .R2}{R1 + R2}$

Exemples
R1 = 10 Ω et R2 = 10 Ω R = 100 / 20 = 5 Ω
R1 = 10 Ω et R2 = 5 Ω R = 50 / 15 = 3,33 Ω

Si les deux résistances sont de même valeur, alors montée en série, la résistance résultante est DOUBLE;
Et montée en parallèle, la résistance résultante est MOITIÉ.

G- Comparaison de MOYENNES …

La moyenne de deux nombres est toujours comprise entre ces deux nombres. Si les deux nombres sont proches, toutes les moyennes sont voisines. Mais si les deux nombres sont éloignés l'un de l'autre, les écarts entre les différentes moyennes peuvent être très grands comme on peut s'en rendre compte après quelques essais :

	1° nombre x	**1**	**2**	**6**	**40**	**0,001**
	2° nombre y	**2**	**8**	**12**	**120**	**1000**
Moyenne	**Harmonique H**	**1,33**	**3,2**	**8**	**60**	**0,002**
	Géométrique G	**1,41**	**4**	**8,5**	**69**	**1**
	Arithmétique A	**1,5**	**5**	**9**	**80**	**500**
	Moyennes Quadratique Q	**1,58**	**5,8**	**9,5**	**89**	**707**

Toutes ces moyennes vérifient les relations :

$$H < G < A < Q \qquad \text{et} \qquad G^2 = H\,A$$

et $\quad H = 2xy/(x + y) \qquad G = (xy)^{1/2} \qquad A = (x + y)/2 \qquad Q = [(x^2 + y^2)/2]^{1/2}$