gm energie

Site : gm-energie.com

Dérivées et Intégrales : ça sert à quoi ? …! (1/4)

<u>Les fonctions dérivées en mathématique</u> :

Une fonction f(x) permet d'appliquer une opération f sur un nombre x pour obtenir un autre nombre f(x) en résultat. On peut visualiser cette fonction par une courbe : par exemple, pour la fonction
$g(x) = -3x^3 + 5x^2 + 5$ on obtient pour *x* compris entre −1 et 2 la courbe ci-dessous (fig1) :

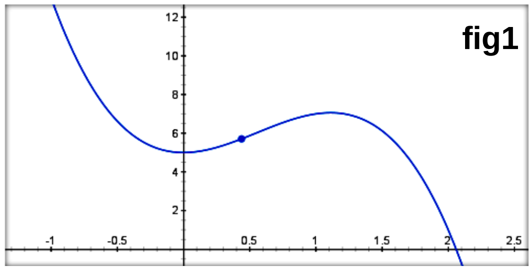

fig1

Comment varie cette courbe ? En partant de la gauche et en allant vers la droite la courbe descend beaucoup au début , puis descend plus lentement, puis remonte un peu, puis redescend un peu, pour enfin plonger vers le bas. On peut traduire cela numériquement, en prenant les règles suivantes : si la courbe descend, on met un nb négatif, si la courbe est stationnaire, on met 0, si la courbe monte on met un nb positif. On obtient un croquis comme ceci à droite (fig2) .

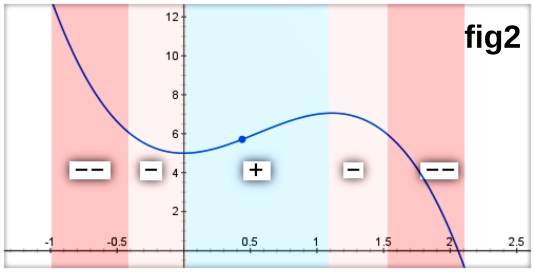

fig2

On peut mettre des valeurs numériques sur cela : la courbe descend beaucoup au début : **on met −3** , la descente diminue un peu : **on met −1** , puis elle remonte un peu : **on met +1** , puis ça redescend un peu : **on met −1** , enfin, la courbe plonge vers le bas : **on met −3**. On peut se demander alors : existe-t-il une autre fonction qui possède les valeurs qu'on a mis ici ? Une fonction qui soit à −3, puis −1, puis +1, puis −1, puis −3 ? Cette fonction existe. On peut la représenter (fig3) : en bleu, on retrouve nos valeurs −3, −1, +1, −1 et −3. En noir, c'est une courbe qui passe à ~ vers ces valeurs.

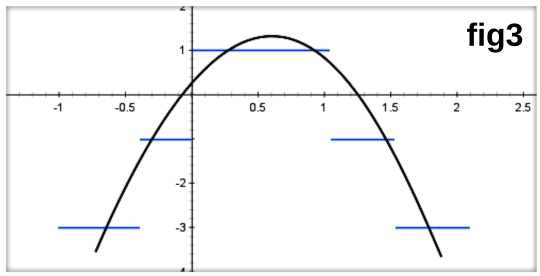

fig3

Et bien cette courbe représente la dérivée de g(x).

<u>La fonction dérivée</u> : la fonction dérivée de g(x) est notée g'(x) et représente les variations de la fonction g(x).

Ici, nous avons pris des valeurs approximatives. Si on trace la vraie fonction dérivée de g(x), on obtient très exactement ceci (fig4), où g(x) est en rouge et g'(x) en bleue (la courbe noire précédente n'était pas bien éloignée)…

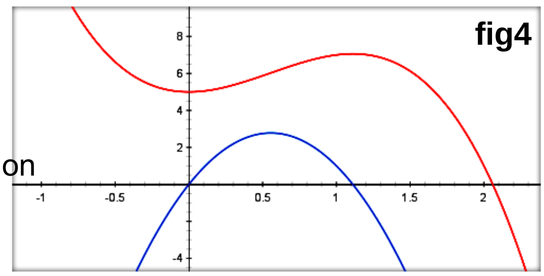

fig4

Pour avoir la valeur de la fonction dérivée en un point donné, il faut connaitre la variation (l'inclinaison) de la fonction principale en ce point. On sait qu'il faut tracer la tangente à la courbe et en calculer la pente : en effet, la pente d'une droite est plus simple à mesurer graphiquement que la pente d'une courbe. La courbe bleue g'(x), dérivée de la courbe rouge g(x) est la **fonction dérivée** :
$g'(x) = -9x^2 + 10x$ Calculer et tracer la **<u>fonction dérivée</u>** d'une fonction permet de visualiser *la* ***<u>variation</u>*** de cette fonction. En effet, partout où la fonction dérivée est positive (donc au-dessus de l'axe de des abscisses), la fonction principale est croissante; et partout où la fonction dérivée est négative, la fonction principale est décroissante. Notez que la fonction dérivée a ses racines (endroits où elle coupe l'axe des abscisses) aux mêmes endroits où la fonction principale passe de croissante à décroissante (ou inversement).

<u>À quoi ça sert</u> ? Les fonctions dérivées, montrent donc la variation d'une fonction principale. En analysant la dérivée, on obtient donc **des informations supplémentaires** sur la fonction principale.
Les applications sont très nombreuses : il arrive que ce n'est pas une valeur qui importe mais la variation d'une valeur. Par exemple en physique, si on prend **un champ magnétique**, ce dernier n'induit un courant électrique que s'il varie (loi de Maxwell-Faraday). Ici, la connaissance du champ magnétique ne suffit pas et il faut connaître sa variation (sa dérivée) pour connaître l'intensité du courant induit. Un autre exemple : la **vitesse** ; quand on change sa vitesse de déplacement, on subit une accélération ou une décélération : l'accélération existe que lorsque la vitesse varie ; l'accélération est la dérivée de la vitesse. Les dérivées sont autour de nous et la science en a beaucoup besoin : en thermodynamique, en chimie, en électricité…

Encore une remarque : en mathématique on utilise la notation « f '(x) » pour désigner la dérivée de la fonction f(x) ; en physique, on notera plutôt d(f)/*dx*, pour signifier qu'on dérive la fonction f par rapport à la variable x. Si j'avais mis d(f)/*dz*, ça aurait voulu dire qu'on dérive la fonction f par rapport à la variable z; en physique, il arrive que certaines fonctions ont plusieurs variables (pas juste x) et il faut donc savoir par rapport à quoi on la dérive (quelle paramètre varie, en fait) : la température d(f)/dT ? la pression d(f)/dP ? (en fait les dérivées ne sont pas seulement un ″jeu″ de mathématiciens). Il y a un vrai concept derrière la **fonction dérivée** qui traduit la façon dont une autre **fonction varie**, comment elle évolue (monte, descend, stagne), et il y a des tas de disciplines où un paramètre seul n'est pas intéressant mais où **la variation de ce paramètre est importante.**

Les fonctions intégrales en mathématique :

Reprenons notre exemple de fonction **$g(x) = -3x^3 + 5x^2 + 5$** (fig1) qui a comme valeur 7 pour x=1. Tout comme la dérivée constitue en fait l'inclinaison de la courbe (ou la variation de la fonction) en un point donné, on peut remarquer d'autres choses sur la courbe d'une fonction. Par exemple, quelle est **la surface** (rose) **située entre la courbe et l'axe des abscisses** ? (voir fig2) Ici, la surface en rose correspond à l'aire sous la courbe entre les bornes −2,5 et +2,6 (certaines parties sont coupées). Et bien mathématiquement, cette aire est égale à l'intégrale de la fonction g sur l'interval [−2,5 ; 2,6]. Une intégrale correspond donc à **une aire située sous la courbe** ; nous allons vérifier ceci pas à pas …

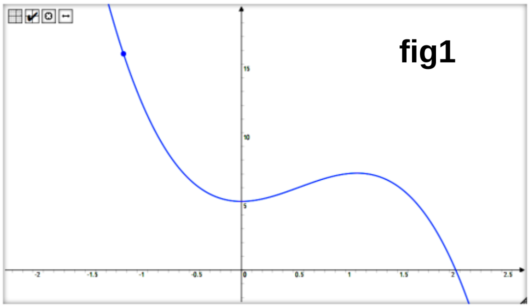
fig1

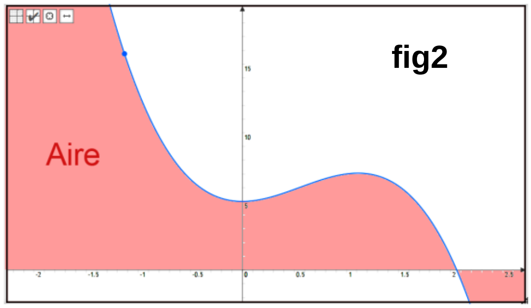

fig2

Exemple de calcul d'intégral entre deux bornes à partir d'une aire sous une fonction constante

L'aire en rose pour la fonction g n'est pas facile à mesurer : la courbe n'est pas une forme géométrique.
Prenons quelque chose de plus simple, comme une fonction constante (fig3) : f(x) = 3
Calculons l'aire sous la courbe (fig4) entre les points −2 cm et +2 cm. Combien mesure cette aire ? Ici, la surface est très simple à calculer : c'est un rectangle. La hauteur du rectangle est de 3 cm et la largeur va de −2 à +2, donc mesure 4 cm . L'aire sous la courbe, entre ces deux bornes est donc 12 cm².

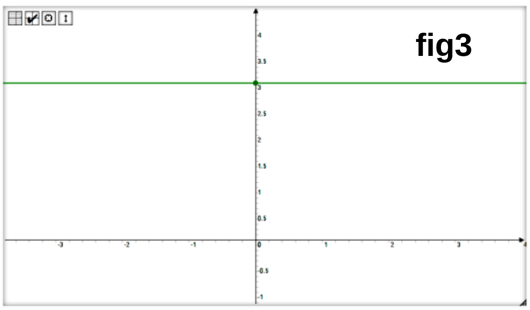
fig3

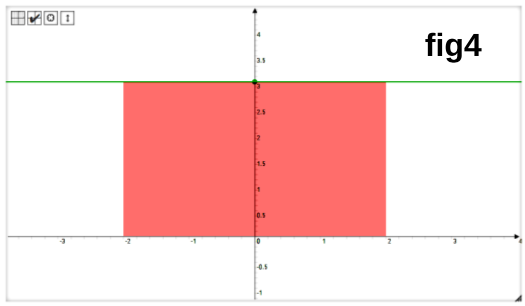
fig4

Intégral complète d'une fonction

On peut chercher l'aire sous la courbe sur tout le domaine de définition de la fonction (entre 2 bornes dans le cas précédent). Pour la fonction f(x), l'aire sous toute la courbe est donc toujours un rectangle. La hauteur du rectangle est toujours 3. Sa largeur, même si elle est infinie (si la fonction va de -∞ à +∞), correspond en fait à la largeur sur l'axe des x : c'est donc tout simplement x.
Pour une fonction f(x) = 3, l'aire sous la courbe est donc égale à 3*x*.
La fonction qui donne l'aire sous la courbe d'une autre fonction est nommé **la fonction « primitive »**. Elle se note généralement avec une lettre capitale. La primitive de la fonction f se nomme donc F.
On a donc F(x) = 3x.
On remarque que la dérivée de F correspond à f : **la primitive est l'inverse de la dérivée**.
On sait effectivement que la primitive d'une fonction constante, est une fonction linéaire. On retrouve donc bien cette propriété ici.

Exemple de calcul d'intégral à partir d'une aire sous une fonction linéaire (fig5)

Prenons la fonction h(x) =3*x*, et calculons l'aire sous la courbe :
On voit que l'aire à droite de l'axe des ordonnées correspond à un triangle rectangle et on sait que l'aire d'un triangle rectangle est égal à la moitié de l'aire du rectangle dont il est issu.
Les côtés du triangle à prendre en compte sont les deux côtés horizontal et vertical du triangle : il correspondent respectivement à la distance à l'origine, donc à x ; et à l'ordonnée. Or, pour un point x, l'ordonnée correspond à la h(x), soit 3*x*.

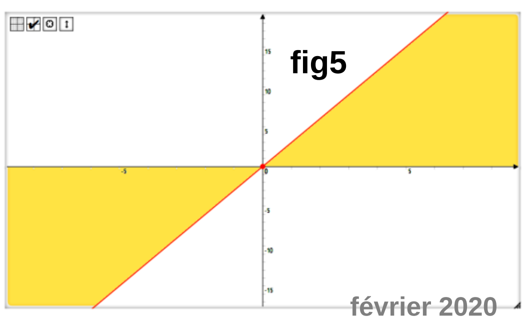
fig5

L'aire du triangle de droite sur le graphique correspond donc à la moitié de 3*xx*, soit $^{3}/_{2}x^{2}$.
Le même raisonnement est appliqué sur le triangle de gauche, celui pour les x négatifs. On obtient bien-sûr le même résultat (en valeur absolue). Au final, on obtient donc la valeur de l'intégrale sur tout le domaine de définition de la fonction h.
Cette aire est calculée par la fonction primitive H et qui vaut donc $^{3}/_{2}x^{2}$. C'est l'expression de la primitive de la fonction linéaire h(x).

Le calcul d'intégral pour une fonction quelconque
On a revérifier les formules pour les intégrales des fonctions constantes et linéaires. Que se passe t-il pour une fonction quelconque, comme la fonction g du début ? Les courbes ne constituent pas de formes géométriques. On peut cependant approcher l'aire de la courbe avec des rectangles (fig6) ci-contre. On voit que l'aire de tous les rectangles additionnée approche à peu près la courbe. Ici, on a pris des rectangles tous les 0,5 cm, et la hauteur du rectangle s'arrête quand son côté droit atteint la courbe. L'aire d'un rectangle est donc : $g(n\times0,5)\times0,5$, où n est un entier qui correspond au rectangle choisi (n=3 correspond au 3e triangle, donc celui qui va de 1 à 1,5). Pour le rectangle qui va de 1 à 1,5 on a donc une aire de $g(3\times0,5)\times0,5$. La somme de tous les rectangles est alors de : $(-\infty+\infty)\ \sum g(n\times0,5)\times0,5$.

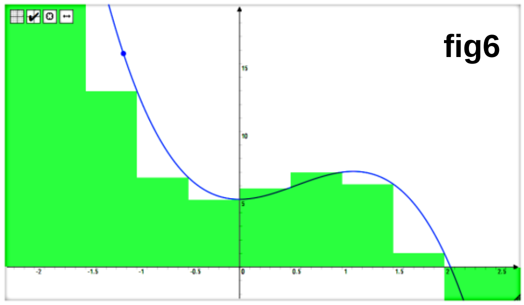
fig6

L'aire en vert n'est pas tout à fait égale à l'aire sous la courbe : parfois il y a des morceaux qui dépassent, parfois il en manque. On peut réduire l'erreur ainsi commise en diminuant la largeur de rectangles.
Diminuons la largeur des rectangles de façon infinie : chaque rectangle aura désormais **une largeur infiniment petite**. Sa largeur est notée dx, signifiant « *une variation infiniment petite sur x* ».
À ce niveau, chaque rectangle infiniment fin a une hauteur égale à g(x) et une largeur égale à dx.
La somme de tous les rectangles est donc logiquement : $(n=-\infty+\infty)\ \sum g(x)\times dx$
Or ici, le nombre n n'a plus aucun sens : en effet, vu que dx est infiniment petit, ça n'a plus de sens de les dénombrer. Dans ce cas là, on utilise non plus la notation de la somme discrète (ou discontinue) ∑ mais la notation d'une somme prévue pour calculer les intégrales : **la somme intégrale** noté avec le symbole « *s long* » : $\int$ L'origine de ce symbole correspond à un « *S* » référant au mot « *somme* ». On l'utilise donc ici pour désigner l'aire sous la courbe quand on utilise l'approximation des rectangles de largeur infiniment petites : $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$. Cette intégrale ne peut plus vraiment se mesurer graphiquement. On résout ceci en calculant la primitive de la fonction. Le théorème fondamental de l'analyse (un théorème de base en math) dit que l'aire sous la courbe d'une fonction est égale à la primitive de cette fonction. Calculer l'aire ou calculer la primitive revient donc à la même chose.
Pour notre fonction g de départ, on a donc :

$$\mathbf{Fx) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx \qquad Fx) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-3x^3 + 5x^2 + 5)dx}$$

Et avec les règles de calcul sur les intégrales des polynômes il vient : $\mathbf{F(x) = 3/4x^4 + 5/3x^3 + 5x}$

<u>La constante d'intégration</u> ?

La primitive F est la fonction qui prends f pour dérivée. Soient ces deux fonctions : $I(x)= x^2$ $J(x)=x^2 + 3$
La dérivé de chacune d'elle est égale à $k(x) = 2x$.
Dans ce cas, quelle est la primitive de la fonction k : est-ce que c'est I ou J ?
En fait, il s'agit des deux fonctions.
Quand on calcule la primitive d'une fonction, on doit ajouter une constante : ainsi, la primitive de la fonction cos(x) est sin(x) + Constante.
Ajouter une constante à une fonction, ça revient à ajouter le même nombre pour chaque valeur de la fonction. Graphiquement, cela fait monter ou descendre la courbe : fig7
Si la courbe ne fait que monter, alors la variation de la fonction ne change pas : les dérivées sont donc identiques à chaque fois. Pour chaque fonction, il y a plusieurs primitives qui ne diffèrent entre-elles que par la valeur de d'une constante, d'où le « + Constante » que l'on doit ajouter.

Dérivées et Intégrales : ça sert à quoi ? ...! (4/4)

En pratique, quand on doit calculer la primitive d'une fonction, il est donné une condition initiale : une information supplémentaire qui permet de déterminer précisément cette constante. Par exemple, si on vous dit de calculer la primitive L(x) de la fonction l(x) = -sin(x) et qu'on vous dit que L(0) = 2, alors vous pouvez déterminer la primitive de l(x) :

L(x) = ∫ *l*(*x*)*dx* L(x) = ∫ *-sin*(*x*)*dx* L(x) = cos(x) + Cste

On sait que L(0) = 2. On a donc 2 = cos(0) + Cste = 1 + Cste donc Cste=1.

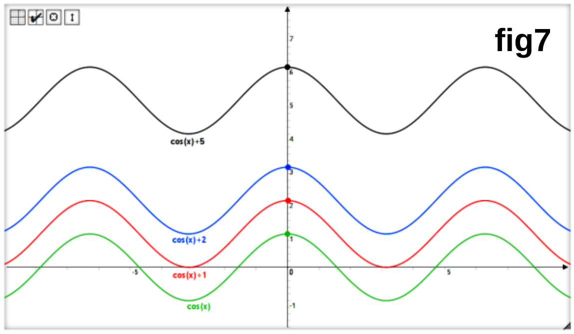

fig7

La détermination de la constante d'intégration se fait toujours à l'aide d'une condition qui est soit donnée, soit à déterminer. En physique, il peut s'agir de l'altitude d'un objet au moment du lâcher, ou bien la vitesse à l'instant 0 …

Intégrales multiples

Jusqu'à présent on avait une fonction g dont on voulait l'aire sous la courbe sachant que cette aire correspondait à l'intégrale de la fonction. Une première approche a été d'utiliser des rectangles pour mesurer l'aire (simplicité avec des rectangles). Les rectangles laissant des espaces vides sous la courbe, on pouvait être plus précis en diminuant la largeur de ces rectangles. On a poussé ce raisonnement jusqu'à avoir une largeur de rectangle infiniment petite. Pour calculer une somme d'un nombre infini d'éléments infiniment petit, on utilise la somme intégrale avec le symbole ∫. Ici c'est la largeur des rectangles qui était infiniment petite, il fallait donc faire une intégration sur la variable x. C'est pour cela que l'on a mis dx dans l'expression des intégrales : **G(x) = ∫ *g*(*x*)*dx.*** Imaginons maintenant que nous ayons non plus une courbe dépendant d'une variable, mais une surface en 3D qui dépend de deux variables : fig8

Ici, l'altitude x dépend à la fois de l'ordonnée y et de l'abscisse x. Pour calculer, de façon similaire, le volume sous la courbe, il faut utiliser une double intégrale.

On applique alors l'intégrale sur x, puis dans la foulée sur y : **F(x,y) = $\int_x \int_y$ *f*(*x,y*)*dxdy***

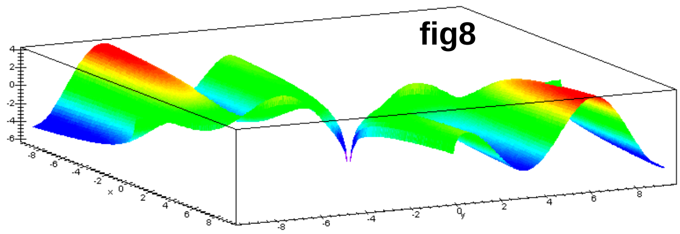
fig8

On peut imager de cette façon : si vous devez empiler des cartons dans votre garage : vous commencez à créer une ranger de carton en bas. Quand la première rangée est faite, vous faites une rangée juste au dessus. Puis quand tout le mur est recouvert de cartons, vous recommencez avec une nouvelle « couche » de cartons. Vous intégrez donc votre garage selon des lignes de carton empilées, puis selon des « couches » de cartons. En mathématique, on intègre la fonction selon une première variable dx puis selon une seconde variable dy, jusqu'à avoir déterminée le volume intégral sous la courbe. En pratique, on peut très bien avoir 2, 3, 4… voir plus d'intégrales successives. En fait, cela ne correspond qu'à une succession d'intégrales simples, à chaque fois sur une variable différente. Pour prendre un exemple, dans la loi physique des gaz parfaits, P × V = nRT, la température T est dépendante à la fois du volume V et de la pression P. Si on fait varier V et P, la température va changer. En utilisant une intégrale double, on sait calculer la température lorsque le volume et la pression varient : il suffit de considérer que le volume et la pression varient de façon indépendante, puis d'intégrer successivement par rapport au volume puis à la pression (ou inversement).

Intérêt des intégrales

Tout comme les dérivées ont des applications en physique, les intégrales en ont aussi. Par exemple, en thermodynamique, on utilise les intégrales pour modéliser le comportement d'un gaz lors de la détente ou de la compression : on étudie ce gaz quand la variation de pression est infiniment petite : les fonctions de température et de volume vont alors évoluer en fonction de la pression : c'est à la base du fonctionnement d'un moteur thermique, d'une pompe à chaleur, d'un climatiseur ou d'un frigo… Sans le calcul d'intégrales, ces appareils n'existeraient pas, ou auraient un rendement bien plus mauvais.

On s'en sert également en dynamique des fluides pour modéliser l'écoulement d'un fluide, ou en électricité pour déterminer le champ magnétique ou électrique qui règne autour d'une particule.

Les intégrales et les dérivées sont fortement liées : l'une est inverse de l'autre, et on les retrouve bien souvent de façon simultanée.