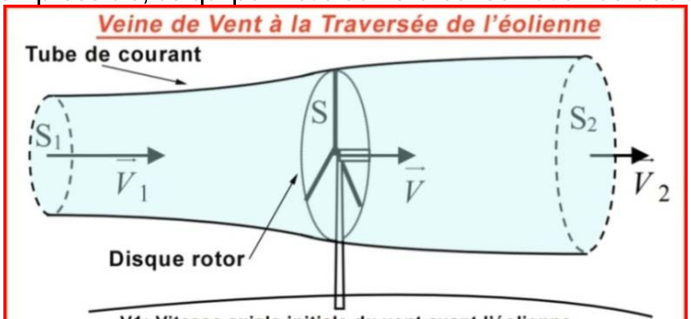
EOLIENNE : La limite de BETZ – Rendement Optimal

La production d'énergie éolienne se fait par prélèvement d'énergie cinétique du vent par les pales. On considère une veine de vent et on note les 3 vitesses V_1, V et V_2 On suppose l'air incompressible, ce qui permet d'écrire la conservation du débit volumique q_v (en m^3/s) : $q_v = Cte = S_1.V_1 = S_2.V_2 = S.V$



Le théorème d'Euler* (ou des quantités de mouvement) permet d'écrire que la force F s'exerçant sur les pales de l'éolienne est donnée par l'expression :
$F = \rho.S.V.(V_1\text{-}V_2)$ avec ρ la masse volumique de l'air (en $kg.m^{-3}$), S en m², V, V_1 et V_2 en m/s.
On en déduit que la **puissance mécanique P (en W) fournie par le vent à l'éolienne** s'écrit : ☼ $P = F.V = \rho.S.V^2.(V_1 - V_2)$

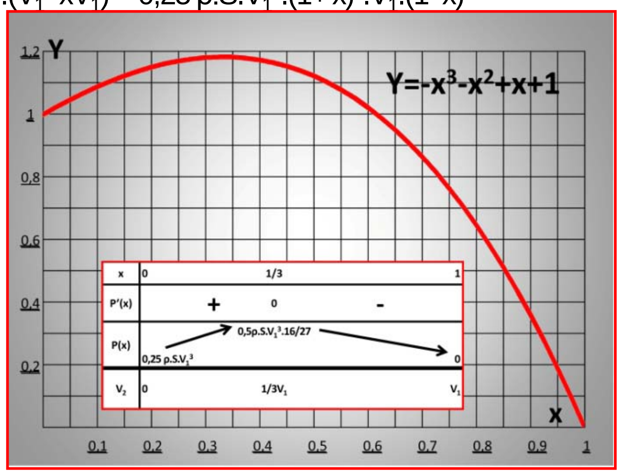
[*<u>Théorème d'Euler</u> : La somme vectorielle $\sum F_{ext}$ des forces appliquées à un tronçon de fluide en écoulement permanent est égale au produit du débit massique q_m par la différence vectorielle ($v_2 - v_1$) des vitesses du fluide en aval et en amont de ce tronçon :
$\sum F_{ext} = q_m . (v_2 - v_1)$ avec $\sum F_{ext}$ en N, q_m en kg/s, v_1 (à l'amont) et v_2 (à l'aval) en m/s. De plus, $q_m = \rho\, q_v$ et $q_v = v\, S$ avec q_m le débit massique en kg/s, q_v le débit volumique en m³/s, v en m/s et S en m²]

1) <u>Relation entre V, V_1 et V_2</u> : La masse d'air élémentaire dm traversant l'éolienne pendant le temps dt est $dm = S.V.dt.\rho$. La diminution d' énergie cinétique de cette masse dm lorsque la vitesse passe de la vitesse V_1 à la vitesse V_2 est $dEc = 0{,}5\, dm.V_1^2 - 0{,}5\, dm.V_2^2 = 0{,}5\, S.V.dt.\rho.(V_1^2 - V_2^2)$
La puissance P peut donc s'écrire aussi $P = dt\ c\ dE = 0{,}5\, S.V.\rho.(V_1^2 - V_2^2)$.

a) A partir des 2 expressions de la puissance P et en utilisant la relation (a +b) × (a - b) = a² - b² , déterminons la relation simple qui existe entre les trois vitesses V_1, V_2 et V : (a + b) × (a - b) = a² - b² d'où ☼ $\rho.S.V^2.(V_1\text{-}V_2) = 0{,}5\, S.V.\rho.(V_1^2 - V_2^2) \Leftrightarrow \rho.S.V^2.(V_1\text{-}V_2) = 0{,}5\, S.V.\rho.(V_1+V_2).(V_1\text{-}V_2) \Leftrightarrow$ **$V = 0{,}5\, (V_1+V_2)$** d'où **V est la valeur moyenne de V_1 et V_2**

b) Déduisons que la **puissance P** peut s'écrire $P = 0{,}25\ \rho.S.(V_1+V_2)^2.(V_1 - V_2)$ (expression dans laquelle la vitesse V n'apparaît plus) : $P = dt\ c\ dE = 0{,}5\, S.V.\rho.(V_1^2 - V_2^2) = 0{,}5\, S.V.\rho.(V_1+V_2).(V_1\text{-}V_2) = 0{,}5\, S.\ 0{,}5\, (V_1+V_2).\rho.(V_1+V_2).(V_1\text{-}V_2)$
$P = 0{,}25\, \rho.S.(V_1+V_2)^2.(V_1\text{-}V_2)$

2) <u>Limite de Betz</u> - Proposons nous de déterminer dans quelle(s) condition(s), entre V_1 et V_2, la puissance P extraite par les pales est maximale. On pose **$x = V_1 / V_2$** Ce rapport x varie de 0 à 1 lorsque V_2 augmente de 0 (l'éolienne arrête totalement le vent) à V_1 (l'éolienne ne freine pas du tout le vent).
a) Montrons que la **puissance P** peut s'écrire en **fonction de x** : $P(x) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^3 .(1 + x)^2.(1 - x)$
on a $V_2 = xV_1$ d'où $\Rightarrow P = 0{,}25\, \rho.S.(V_1+V_2)^2.(V_1\text{-}V_2) = 0{,}25\, \rho.S.(V_1 + xV_1)^2.(V_1 - xV_1) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^2.(1+x)^2.V_1.(1\text{-}x)$
$P(x) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^{\ 3} .(1+x)^2.(1\text{-}x)$



b) ρ, S et la vitesse du vent à l'« entrée » V_1 étant des constantes, étudions les variations de P(x) pour x ∈ [0 ; 1] et déduisons la relation devant exister entre V_1 et V_2 pour que la puissance P passe par un maximum. Représentons graphiquement P en fonction de x pour [0 ; 1].

On a : $P(x) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^3 .(1+x)^2.(1\text{-}x) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^3 .(1+2x + x^2).(1\text{-}x)$
$= 0{,}25\, \rho.S.V_1^3 .(- x^3 - x^2 + x +1)$ d'où $P'(x) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^3 .(- 3x^2 - 2x + 1)$
Pour $P'(x) = 0 \Leftrightarrow 0{,}25\, \rho.S.V_1^3 .(-3x^2 - 2x + 1) = 0$
$\Leftrightarrow -3x^2 + 2x - 1 = 0$ $\Delta = 16 > 0$ $x_1 = -1$ et $x_2 = 1/3$

P(x) est maximal pour x =1/3 c'est-à-dire pour $V_2 = 1/3\, V_1$

c) Exprimons cette puissance maximale P_{maxi} éolienne en fonction de ρ, S et V_1.
On a alors $P_{maxi} = P(1/3) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^{\ 3} .(1+ 1/3)^2.(1\text{-} 1/3) = 0{,}25\, \rho.S.V_1^{\ 3}.16/9 \,.\, 2/3 =$ **$0{,}5\, \rho.S.V_1^{\ 3}.16/27 = P_{maxi}$**
d) Sachant que la puissance contenue dans la veine de vent est donnée par **$P_{veine} = 1/2\, \rho.S.V_1^3$** , exprimons le quotient entre P_{maxi} éolienne et P_{veine}. **[P_{maxi} éolienne / P_{veine}] = 16/27 ≈ 0,593**
e) Représentation de ce rapport d'un point de vue physique :
Le rendement du rotor de l'éolienne ne peut pas dépasser **59,3 %**, ce qui constitue la **limite de Betz**.
f) - Calculons P_{maxi} éolienne pour S = 10 000 m², $\rho_{air} = 1{,}225\ kg.m^{-3}$ (correspondant à une altitude voisine de 600 m), $V_1 = 36\ km.h^{-1} = 10\ m.s^{-1}$ (vent fort)
$P_{maxi} = 0{,}5\, \rho.S.V_1^{\ 3}.16/27$ d'où $P_{maxi} \approx 3\,630\,000$ W soit 3,63 MW,
- Calculons P_{maxi} éolienne pour S = 10 000 m², $\rho_{air} = 0{,}34$ kg.m-3 (comme au voisinage de 10000 m d'altitude), $V_1 = 252$ km.h-1 = 70 m.s-1 (!!! À 10000 m d'altitude)
$P_{maxi} = 0{,}5\, \rho.S.V_1^{\ 3}.16/27$ d'où $P_{maxi} \approx 345\,54\,000$ W soit 345 MW, d'où l'intérêt de l'exploitation des vents à une altitude proche de 10 000 m où les vitesses sont en permanence très élevées …